



# Modèle de turbulence générique à deux équations de transport

Roland Schiestel

## ► To cite this version:

| Roland Schiestel. Modèle de turbulence générique à deux équations de transport. 2005. hal-00100496

**HAL Id: hal-00100496**

**<https://hal.science/hal-00100496>**

Preprint submitted on 26 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# NOTE DE RECHERCHE

## Modèle de turbulence générique à deux équations de transport

R. Schiestel

ISRN : IRPHE/RS—2005-01—FR

Décembre 2005

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

*Résumé :*

Les modèles de fermeture de turbulence à deux équations sont intéressants pour les applications industrielles dans lesquelles le détail du champ turbulent n'est pas recherché. Ces modèles sont encore très utilisés dans les grands codes industriels en CFD. Les modèles à deux équations sont généralement basés sur le concept de viscosité de la turbulence et de ce fait peuvent être résolus numériquement de façon efficace alors que les modèles aux tensions de Reynolds nécessitent des techniques numériques spécifiques. Dans ces modèles de fermeture à deux équations, la première équation est généralement l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence mais la deuxième équation peut porter sur diverses grandeurs caractéristiques et il existe une grande variété de formulations. Dans la pratique le choix se fait en fonction des types d'écoulements étudiés et aussi de la robustesse numérique de la formulation correspondante. Selon le choix de la variable caractéristique pour la deuxième équation, les propriétés du modèle qui en résulte peuvent être différentes. L'objet de la présente note est d'établir une formulation générique de cette équation qui englobe les principaux modèles existants. On utilisera pour cela la méthode du modelage invariant de J.L. Lumley selon une approche adaptée au présent problème.

Le modèle générique présenté permet une formulation synthétique des divers modèles à deux équations et permet aussi de suggérer des termes nouveaux en vue de servir au développement de nouvelles formulations.

# Modèle de turbulence générique à deux équations de transport

Les modèles aux tensions de Reynolds représentent probablement le niveau optimal de fermeture pour les applications pratiques car ils semblent posséder potentiellement une universalité suffisante pour s'appliquer à une large gamme d'écoulements cisailés turbulents ainsi que les écoulements soumis à des forces volumiques telles que les forces de gravité ou de Coriolis. Cependant, leur formulation est parfois complexe et les modèles avancés de nouvelle génération n'ont pas encore été suffisamment testés, leur développement n'est pas achevé et de plus ils sont parfois lourds à traiter numériquement. Pour toutes ces raisons, les fermetures simplifiées sont intéressantes pour les applications industrielles dans lesquelles le détail du champ turbulent n'est pas recherché. Les fermetures simplifiées sont si nombreuses que l'on ne pourra pas les citer toutes, nous indiquerons les principales directions de leur étude. La classification usuelle se fait selon le nombre d'équations de transport. On considérera ici les modèles à deux équations faisant appel à un coefficient de viscosité isotrope de la turbulence et ceux utilisant une fermeture non-linéaire des tensions de Reynolds.

Dans les modèles de fermeture à deux équations, la première équation est généralement l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence qui fournit l'échelle de vitesse caractéristique du champ turbulent. Par contre, la deuxième équation qui fournit l'échelle de longueur caractéristique du champ turbulent peut porter sur diverses grandeurs et il existe une grande variété de formulations dans la littérature scientifique. L'objet de la présente note est d'établir une formulation générique de cette équation qui englobe les principaux modèles existants et puisse suggérer des extensions possibles.

## 1. Généralités

Les modèles à deux équations les plus simples utilisent en général le concept de viscosité isotrope de la turbulence. Les tensions de Reynolds sont alors obtenues à l'aide d'une loi de comportement :

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}), \quad [1]$$

dans laquelle  $\nu_t$  est obtenu par la formule de Prandtl-Kolmogoroff,

$$\nu_t = c_\mu \ell \sqrt{k}, \quad [2]$$

où  $\ell$  est l'échelle des tourbillons porteurs d'énergie.

Le modèle à deux équations le plus connu est le modèle dit  $k$ - $\varepsilon$  mais on rencontre dans la pratique de nombreux modèles à deux équations utilisant une variable autre que  $\varepsilon$  pour calculer l'échelle de longueur. Cette variable est généralement de la forme  $Z = k^m \ell^n$ . Ces modèles ont un caractère souvent plus empirique et l'équation de  $Z$  est alors souvent

construite sur des bases purement intuitives. Les raisons de ce choix peuvent provenir de la recherche d'une meilleure robustesse numérique ou la facilité d'introduction des conditions aux limites. Souvent dédiés à une classe privilégiée d'écoulement turbulents pour lesquels chaque modèle a été testé avec précision, ces modèles sont très utiles pour des applications d'ingénierie. On les rencontre notamment dans les applications en couche limite en aérodynamique externe et interne.

Ainsi de manière générale, les modèles à deux équations de transport utilisent : une équation de transport pour l'échelle de vitesse ( $k$ ) et une équation de transport pour une échelle de turbulence ( $\ell$ ) ou bien pour une variable  $Z$  à partir de laquelle on peut tirer une échelle de longueur  $Z = k^m \ell^n$ .

Citons par exemple (Cf. [SCH 98]) :

<u>Modèle</u>	<u>Fonction <math>Z</math> utilisée</u>
Kolmogoroff (1942)	$k^{1/2}/\ell$
Rotta (1951)	$\ell$
Davidov (1961)	$k^{3/2}/\ell \approx \varepsilon$
Harlow, Nakayama (1967)	$k^{3/2}/\ell \approx \varepsilon$
Spalding (1969)	$\ell$
Saffman (1970)	$k/\ell^2$
Rodi & Spalding (1970)	$k\ell$
Rotta (1972)	$k\ell$
Spalding (1972)	$k/\ell^2$
Jones, Launder (1972)	$k^{3/2}/\ell \approx \varepsilon$
Wilcox (1988)	$k^{1/2}/\ell$

Les équations pour  $Z$  sont en général de formes semblables :

$$\frac{dZ}{dt} = C_{Z1} \frac{Z}{k} P + \left( \frac{\ell \sqrt{k}}{h_Z} Z_{,i} \right)_{,i} - C_{Z2} Z \frac{\sqrt{k}}{\ell} + S_Z, \quad [3]$$

mais la source secondaire  $S_Z$  varie suivant le choix de  $Z$ .

Les équations [3] sont toutes équivalentes quel que soit le choix de  $Z$  dans le cas d'un champ turbulent homogène. On peut le montrer aisément par changement de fonction inconnue. Considérons pour cela les équations du modèle ( $k$ - $Z$ ) en turbulence homogène :

$$\frac{dk}{dt} = P - \varepsilon, \quad [4]$$

$$\frac{dZ}{dt} = C_{Z1} \frac{Z}{k} P - C_{Z2} Z \frac{\sqrt{k}}{\ell}, \quad [5]$$

avec :

$$P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\ell} = Z^{-1/n} k^{(3n+2m)/2n},$$

$$\ell = Z^{1/n} k^{-m/n}, \quad \nu_t = c_Z \ell \sqrt{k} = c_Z Z^{1/n} k^{(n-2m)/2n}.$$

Si l'on effectue le changement de fonction inconnue  $\zeta = Z^\alpha k^\beta$ , on trouve comme équations transformées :

$$\frac{d\zeta}{dt} = P - \varepsilon, \quad [6]$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \underbrace{(\beta + \alpha C_{Z1})}_{C_{\zeta 1}} \zeta \frac{P}{k} - \underbrace{(\beta + \alpha C_{Z2})}_{C_{\zeta 2}} \frac{\zeta \sqrt{k}}{\ell}, \quad [7]$$

avec  $\ell = \zeta^{1/\alpha n} k^{-(\alpha m + \beta)/\alpha n},$

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\ell} = \zeta^{-1/\alpha n} k^{(3\alpha n + 2\alpha m + 2\beta)/2\alpha n},$$

$$V_t = c_\zeta \ell \sqrt{k} = c_\zeta \zeta^{1/\alpha n} k^{(\alpha n - 2\alpha m + 2\beta)/2\alpha n}, \quad c_\zeta = c_Z.$$

L'équation de  $\zeta$  garde exactement la même forme que l'équation de  $Z$  avec au second membre un terme source et un terme puits. Par contre en turbulence non homogène le terme de diffusion turbulente introduit, dans le changement de fonction inconnue, de nouveaux termes qui peuvent figurer dans  $S_Z$ . Ainsi, dans le cas non homogène l'utilisation d'une fonction  $\zeta$  à la place de  $Z$  implique non seulement une expression différente des termes de diffusion turbulente mais aussi des différences qui peuvent provenir du fait que les conditions aux limites (en particulier sur une paroi) vont se trouver formulées différemment. L'équation pour  $\varepsilon$  ne nécessite généralement pas de source secondaire, une des raisons qui feront souvent préférer le modèle  $k$ - $\varepsilon$  dans les applications courantes.

De la même manière que précédemment pour  $R_{ij}$  (eq. [1]) une diffusivité turbulente peut être utilisée pour relier les flux thermiques turbulents au gradient de température moyenne :

$$F_{\gamma i} = -\sigma_t \bar{T}_{,i} \quad [8]$$

On définit alors le nombre de Prandtl de la turbulence par  $\text{Pr}_t = \nu_t / \sigma_t$ . Les variations de  $\text{Pr}_t$  doivent alors être spécifiées dans la région étudiée de l'écoulement.



## 2. Formulation d'un modèle générique à deux équations

Afin de synthétiser les différentes formulations évoquées précédemment, on peut réaliser un développement formel d'une équation-modèle générique pour une quantité  $\phi = u^\alpha \ell^\beta$ . En comparaison avec la formule donnée au début du paragraphe 1., il convient donc de prendre  $m=\alpha/2$  et  $n=\beta$  soit  $\phi = k^{\alpha/2} \ell^\beta$  puisque  $k = u^2$ . Le développement suivant s'inspire de la méthode du modelage invariant de J.L. Lumley (Cf. [LUM 70B], [SIE 75]), il est donc purement formel.

On suppose que la fonction  $\phi$  vérifie une équation de transport du type :

$$\frac{d\phi}{dt} = \Psi \quad [9]$$

La fonction  $\phi$  permettra d'évaluer l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence par  $\ell = \phi^{1/\beta} k^{-\alpha/2\beta}$  ou bien le taux de dissipation par  $\varepsilon = \phi^{-1/\beta} k^{(\alpha+3\beta)/2\beta}$ . Physiquement, le second membre de l'équation de  $\phi$  traduit l'effet de la cascade d'énergie modifié par la convection et la diffusion turbulentes. L'échelle de temps caractéristique de la cascade sera  $T = \phi^{1/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta}$ .

On suppose ensuite que le second membre  $\Psi$  de cette équation est une quantité inconnue qui peut être considérée comme une fonctionnelle générale de l'espace et du temps de grandeurs connues. Dans le cadre d'une fermeture à deux équations, les grandeurs connues seront  $k$  et  $\phi$ . On peut y adjoindre aussi la grandeur  $P$ , le taux de

production d'énergie cinétique de la turbulence, qui pourra modifier la valeur de l'échelle

caractéristique  $T$  au travers du paramètre  $G = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{P \cdot \phi^{1/\beta}}{k^{(\alpha+3\beta)/2\beta}}$ . Ainsi ,

$$\Psi = \mathcal{F}\{k, \phi, G\}. \quad [10]$$

Dans cette écriture  $\Psi$  est évaluée au point  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , tandis que les arguments de la fonctionnelle font intervenir tous les points  $\vec{y}$  de l'espace occupé par le fluide et tous les instants antérieurs à l'instant  $t$  considéré.

Selon l'approche de J.L. Lumley, on fera l'hypothèse de faible inhomogénéité et de faible anisotropie, qui permettent de faire des développements limités autour du point  $\vec{x}$  et par là même remplacer la fonctionnelle par une fonction. Ici,  $G$  jouera le rôle de petit paramètre d'anisotropie (en fait  $G$  peut s'interpréter aussi bien comme un paramètre de déséquilibre) :

$$\Psi = f\{k, k_m, k_{mp}, \phi, \phi_m, \phi_{mp}, G\} \quad [11]$$

L'application des théorèmes de représentation tensorielle, impose que la quantité  $\Psi$  étant un scalaire, elle ne peut dépendre que d'autres scalaires ou invariants.

Les invariants construits sur les arguments tensoriels de la fonction  $f$  sont:

$$k_j k_j, k_{jj}, \phi_j \phi_j, \phi_{jj}, k_j \phi_j \quad [12]$$

si l'on se limite à des développements à l'ordre 2 en inhomogénéité. A ces invariants s'ajoutent les scalaires  $k, \phi$  et  $P$ .

On peut dès lors écrire :

$$\Psi = f\{k, \phi, G, k_{,j}k_{,j}, k_{,jj}, \phi_{,j}\phi_{,j}, \phi_{,jj}, k_{,j}\phi_{,j}\} \quad [13]$$

Dans une étape suivante, on effectue un développement limité selon les petits paramètres d'inhomogénéité.

$$\begin{aligned} \Psi = & a_0(k, \phi, G) + a_1(k, \phi, G)k_{,j}k_{,j} + a_2(k, \phi, G)k_{,jj} \\ & + a_3(k, \phi, G)\phi_{,j}\phi_{,j} + a_4(k, \phi, G)\phi_{,jj} + a_5(k, \phi, G)k_{,j}\phi_{,j} \end{aligned} \quad [14]$$

On effectue ensuite un développement par rapport au petit paramètre d'anisotropie  $G$  :

$$a_m(k, \phi, G) = a_m^0(k, \phi) + a_m^1(k, \phi).G + a_m^2(k, \phi).G^2 + \dots, \quad \text{pour } m=0 \text{ à } 5. \quad [15]$$

Toutefois, on se limitera pratiquement à l'ordre 1 pour le terme homogène et à l'ordre zéro pour tous les autres termes. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Psi = & a_0^0(k, \phi) + a_0^1(k, \phi).G + a_1^0(k, \phi)k_{,j}k_{,j} + a_2^0(k, \phi)k_{,jj} \\ & + a_3^0(k, \phi)\phi_{,j}\phi_{,j} + a_4^0(k, \phi)\phi_{,jj} + a_5^0(k, \phi)k_{,j}\phi_{,j} \end{aligned} \quad [16]$$

Les coefficients  $a_m^p(k, \phi)$  qui sont des fonctions des seuls scalaires  $k$  et  $\phi$  peuvent être obtenus par l'analyse dimensionnelle :

$$a_0^0(k, \phi) = b_0^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta},$$

$$\begin{aligned}
a_0^1(k, \phi) &= b_0^1 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta}, \\
a_1^0(k, \phi) &= b_1^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} \frac{\ell^2}{k^2} = b_1^0 \phi^{(\beta+1)/\beta} k^{-(\alpha+3\beta)/2\beta}, \\
a_2^0(k, \phi) &= b_2^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} \frac{\ell^2}{k^2} = b_2^0 \phi^{(\beta+1)/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta}, \\
a_3^0(k, \phi) &= b_3^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} \frac{\ell^2}{\phi^2} = b_3^0 \phi^{(1-\beta)/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta}, \\
a_4^0(k, \phi) &= b_4^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} \frac{\ell^2}{\phi^2} = b_4^0 \phi^{1/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta}, \\
a_5^0(k, \phi) &= b_5^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} \frac{\ell^2}{k\phi} = b_5^0 \phi^{1/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Les coefficients  $b_m^p$  sont de pures constantes numériques. Bien sûr, elles ne peuvent pas être déterminées par la méthode de J.L. Lumley, elles seront calibrées sur des expériences types. On arrive ainsi à la formulation générique :

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt} &= b_0^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} + b_0^1 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} . G \\
&+ b_1^0 \phi^{(\beta+1)/\beta} k^{-(\alpha+3\beta)/2\beta} k_{,j} k_{,j} + b_2^0 \phi^{(\beta+1)/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta} k_{,jj} \\
&+ b_3^0 \phi^{(1-\beta)/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta} \phi_{,j} \phi_{,j} + b_4^0 \phi^{1/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta} \phi_{,jj} \\
&+ b_5^0 \phi^{1/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta} k_{,j} \phi_{,j}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Il est utile d'introduire une viscosité ou une diffusivité de la turbulence sous la forme:

$$\sigma_t = C \cdot \phi^{1/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta} . \quad [19]$$

Ce qui conduit à l'écriture :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = & b_0^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} + b_0^1 \frac{\phi P}{k} + b_1^0 \frac{\phi}{Ck^2} \sigma_t k_{,j} k_{,j} \\ & + b_2^0 \frac{\phi}{Ck} \sigma_t k_{,jj} + b_3^0 \frac{1}{C\phi} \sigma_t \phi_{,j} \phi_{,j} + b_4^0 \frac{1}{C} \sigma_t \phi_{,jj} + b_5^0 \frac{1}{Ck} \sigma_t k_{,j} \phi_{,j} \end{aligned} \quad [20]$$

Compte tenu de relations telle que :

$$\left( \sigma_t \theta_{,j} \right)_{,j} = \sigma_t \cdot \theta_{,jj} + \frac{\beta-\alpha}{2\beta} \frac{\sigma_t}{k} k_{,j} \theta_{,j} + \frac{1}{\beta} \frac{\sigma_t}{\phi} \phi_{,j} \theta_{,j}, \quad [21]$$

où  $\theta$  représente  $k$  ou  $\phi$ , on pourra aussi écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = & C_0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} + C_1 \frac{\phi P}{k} + C_2 \left( \sigma_t \phi_{,j} \right)_{,j} \\ & + C_3 \frac{1}{\phi} \sigma_t \phi_{,j} \phi_{,j} + C_4 \frac{\phi}{k} \left( \sigma_t k_{,j} \right)_{,j} + C_5 \frac{\phi}{k^2} \sigma_t k_{,j} k_{,j} + C_6 \frac{1}{k} \sigma_t k_{,j} \phi_{,j} , \end{aligned} \quad [22]$$

forme analogue à [20] dans laquelle les termes  $(C_3, C_4, C_5, C_6)$  correspondent à un terme complémentaire de diffusion. On remarque à nouveau qu'en turbulence homogène

les formulations sont toutes équivalentes, elles diffèrent en turbulence non homogène en fonction du choix du terme complémentaire. La méthode utilisée permet d'épuiser toutes les combinaisons tensorielles possibles et garantit de ce fait la généralité du modèle. En effet, un changement de fonction inconnue n'introduirait pas de nouveaux termes ([CAT 99]). On vérifie aisément que pour  $\alpha=3$  et  $\beta=-1$  on retrouve un modèle  $k-\varepsilon$  pour lequel les constantes  $C_3, C_4, C_5, C_6$  sont usuellement nulles.

Pour réaliser une extension aux faibles nombres de Reynolds il convient de rajouter pour cela la viscosité moléculaire comme paramètre supplémentaire dans les fonctions d'approximation, ou ce qui est équivalent, le nombre de Reynolds de la turbulence défini par  $Re_t = \frac{\sigma_t}{\nu}$ . On est alors amené à des développements du type :

$$\begin{aligned}
 a_0^0(k, \phi, \nu) &= b_0^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} (1 + h_0^0 Re_t^{-1} + \dots), \\
 a_0^1(k, \phi, \nu) &= b_0^1 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} (1 + h_0^1 Re_t^{-1} + \dots), \\
 a_1^0(k, \phi, \nu) &= b_1^0 \phi^{(\beta+1)/\beta} k^{-(\alpha+3\beta)/2\beta} (1 + h_1^0 Re_t^{-1} + \dots), \\
 a_2^0(k, \phi, \nu) &= b_2^0 \phi^{(\beta+1)/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta} (1 + h_2^0 Re_t^{-1} + \dots), \\
 a_3^0(k, \phi, \nu) &= b_3^0 \phi^{(1-\beta)/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta} (1 + h_3^0 Re_t^{-1} + \dots), \\
 a_4^0(k, \phi, \nu) &= b_4^0 \phi^{1/\beta} k^{(\beta-\alpha)/2\beta} (1 + h_4^0 Re_t^{-1} + \dots), \\
 a_5^0(k, \phi, \nu) &= b_5^0 \phi^{1/\beta} k^{-(\alpha+\beta)/2\beta} (1 + h_5^0 Re_t^{-1} + \dots),
 \end{aligned} \tag{23}$$

pour lesquels on se limitera au premier terme en  $Re_t^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt} = & b_0^0 \phi^{(\beta-1)/\beta} k^{(\alpha+\beta)/2\beta} + b_0^1 \frac{\phi P}{k} + b_1^0 \frac{\phi}{Ck^2} (\sigma_t + h_1 \nu) k_{,j} k_{,j} \\
& + b_2^0 \frac{\phi}{Ck} (\sigma_t + h_2 \nu) k_{,jj} + b_3^0 \frac{1}{C\phi} (\sigma_t + h_3 \nu) \phi_{,j} \phi_{,j} \\
& + b_4^0 \frac{1}{C} (\sigma_t + h_4 \nu) \phi_{,jj} + b_5^0 \frac{1}{Ck} (\sigma_t + h_5 \nu) k_{,j} \phi_{,j}
\end{aligned} \tag{24}$$

### 3. Cas particuliers usuels de modèles à deux équations

Cette formulation précédente permet de retrouver notamment comme cas particuliers, les modèles  $k$ - $\varepsilon$ ,  $k$ - $\omega$ ,  $k$ - $\ell$ , etc. D'autres variables ont été proposées, comme la formulation de J. Cousteix qui utilise la fonction  $\varphi = \varepsilon / \sqrt{k}$  développé dans le but de décrire au mieux le comportement de  $k$  près des parois (Cf. [CAT 99]).

#### 3.1. Le modèle $k$ - $\varepsilon$

C'est le modèle à deux équations de transport (pour  $k$  et  $\varepsilon$ ) qui a été le plus largement testé et utilisé. Sur l'équation générique [22] le modèle  $k$ - $\varepsilon$  est obtenu pour  $\alpha=3$  et  $\beta=-1$  avec des constantes  $C_3, C_4, C_5, C_6$  qui sont usuellement nulles pour la version de base du modèle.

Les équations de  $k$  et  $\varepsilon$  peuvent aussi être développées directement sur équations des moments statistiques en un point, c'est de cette manière que le modèle  $k$ - $\varepsilon$  a été introduit à l'origine. Pour cela, on utilise une hypothèse de diffusion en gradient (avec viscosité isotrope) pour la diffusion turbulente de  $k$  et  $\varepsilon$ , en remplaçant le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  dans les termes de production par la loi de comportement donnée par l'expression [1].

De plus, les termes sources et puits dans l'équation du taux de dissipation doivent être modélisés ([JON 72&73]) :

$$\frac{dk}{dt} = P + \left( \frac{\nu_t}{h_k} k_{,i} \right)_{,i} - \varepsilon, \quad [25]$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{P\varepsilon}{k} + \left( \frac{\nu_t}{h_\varepsilon} \varepsilon_{,i} \right)_{,i} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad [26]$$

avec  $P = \nu_t \bar{U}_{i,j} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i})$  et  $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ ,  $h_k$  et  $h_\varepsilon$  étant les nombres de Prandtl-Schmidt turbulents supposés constants.

La détermination des constantes numériques se fait usuellement par référence à des écoulements turbulents simples, bien connus expérimentalement. La décroissance de la turbulence derrière grille, dans sa période initiale pour laquelle on peut trouver expérimentalement une décroissance de l'énergie en loi puissance, permet de fixer la valeur de  $C_{\varepsilon 2} = 1.9$ . La turbulence de paroi (zone logarithmique de la couche limite turbulente sur plaque plane) fournit la relation :

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{K^2}{h_\varepsilon \sqrt{c_\mu}}, \quad (K=0.41 \text{ constante de Karman})$$

ainsi que  $c_\mu = \frac{u_*^4}{k^2}$  avec  $u_* = \sqrt{\tau_p / \rho}$ .

Par référence aux données expérimentales (mesures de l'énergie cinétique et des tensions de cisaillement en zone de paroi) on en déduit ainsi  $c_\mu \approx 0.09$ .

Les valeurs numériques recommandées par Launder B.E., [LAU 75] sont les suivantes :

$$c_\mu = 0.09, \quad h_k = 1.0, \quad h_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92.$$



La version à faible nombre de Reynolds de turbulence [JON 72&73] est nécessaire pour étudier les zones de proche paroi ou la période finale de décroissance. La formulation est la suivante :

$$\frac{dk}{dt} = P + C_s(\sigma_t k_{,j})_{,j} - \varepsilon + \nu k_{,jj} \quad , \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} \quad , \quad [27]$$

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{P\tilde{\varepsilon}}{k} + C_{\varepsilon}(\sigma_t \tilde{\varepsilon}_{,j})_{,j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \Sigma + \nu \tilde{\varepsilon}_{,jj} \quad , \quad [28]$$

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad , \quad \nu_t = C_{\mu} f_{\mu} \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad ,$$

$$\sigma_t = f_{\mu} \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad , \quad f_{\mu} = \exp \left[ -3.4 / \left( 1 + \frac{\text{Re}_T}{50} \right)^2 \right] \quad , \quad \Sigma = 2\nu C_{\mu} \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \underbrace{U_{i,pl} U_{i,pl}}_{(\partial^2 U / \partial n^2)^2} \quad .$$

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  dans sa version de base, donne en général de bons résultats dans les écoulements simples mais ne peut reproduire de façon satisfaisante les caractéristiques des écoulements complexes (zones de recirculation, écoulements secondaires...). Des difficultés sont apparues également pour des écoulements turbulents relativement simples. Ainsi, avec les valeurs numériques précédemment données pour les constantes du modèle, le taux d'élargissement d'un jet plan turbulent est bien calculé mais le taux d'élargissement d'un jet circulaire est surestimé d'environ 30%. Le même problème apparaît dans le cas des modèles aux tensions de Reynolds, plus accusé encore. La cause semble donc provenir de l'équation de  $\varepsilon$ . De nombreuses variantes dans la formulation des termes sources ont alors été proposées.

Pour remédier à l'anomalie du jet circulaire, Rodi W., [ROD 72] suggère une modification empirique de  $c_\mu$  et  $C_{\varepsilon 2}$  qui permet d'améliorer la prévision numérique du jet circulaire :

$$c_\mu = 0.09 - 0.04f, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 - 0.0667f, \quad \text{avec} \quad f = \left[ \frac{\delta}{\Delta \bar{U}_m} \left( \frac{\partial \bar{U}_{CL}}{\partial x} - \left| \frac{\partial \bar{U}_{CL}}{\partial x} \right| \right) \right]^{0.2}, \quad [29]$$

où  $\bar{U}_{CL}$  représente la vitesse moyenne sur l'axe du jet,  $\Delta \bar{U}_m$  l'écart de vitesse entre l'axe et la zone externe,  $\delta$  l'épaisseur du jet.

Pope S.B., [POP 78] suggère une modification des termes sources de l'équation de  $\varepsilon$  :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P}{k} + \left( \frac{v_t}{h_\varepsilon} \varepsilon_{,i} \right)_{,i} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \chi \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad [30]$$

$$\chi = \omega_{ij} \omega_{jk} S_{ki}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\varepsilon} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\varepsilon} (\bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{j,i}),$$

où  $\chi = \omega_{ij} \omega_{jk} S_{ki}$  représente l'effet du "vortex stretching" par le mouvement moyen. Ce terme complémentaire s'annule pour un écoulement bidimensionnel (en moyenne) mais reste non nul en écoulement tridimensionnel ou axisymétrique, ce qui permet de donner une solution possible pour l'anomalie du jet circulaire. Toutefois, aucune de ces modifications n'est d'application générale.

Du même type que la modification de Pope, celle proposée par Hanjalic K. et Launder B.E., [HAN 80] permet de renforcer le rôle des déformations irrotationnelles en

augmentant le transfert spectral. Cela se traduit en pratique par l'augmentation de l'influence des contraintes normales. L'équation modifiée s'écrit :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P}{k} + \left( \frac{\nu_t}{h_\varepsilon} \varepsilon_{,i} \right)_{,i} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon 3} k \bar{U}_{i,j} (\bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{j,i}), \quad [31]$$

avec  $C_{\varepsilon 3} = 4.44$ .

Cette modification permet d'améliorer l'anomalie du jet circulaire ainsi que la prévision des couches limites turbulentes avec gradient de pression adverse mais là aussi son application n'est pas générale.

Le problème de l'anomalie du jet circulaire peut être résolu par d'autres alternatives encore (Cf. Craft T.J., [CRA 91]) faisant appel à des paramètres supplémentaires, tels les invariants d'anisotropie. Ainsi, une prévision satisfaisante du taux d'expansion des jets est obtenue si l'on utilise l'équation :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{k} \left[ 0.35 \left( \frac{P}{\varepsilon} + \frac{\nu_t}{\varepsilon} \bar{U}_{i,j}^2 \right) - \frac{1.92}{1 + 1.65 A II^{1/2}} \right] + Diff(\varepsilon). \quad [32]$$

Cette formulation ne peut toutefois être utilisée que dans le cadre de modèles au second ordre qui permettent de calculer le tenseur d'anisotropie. En effet, la relation [1] ne permet pas un calcul fiable de  $II$ .

Comme il a été indiqué précédemment, la constante  $c_\mu$  est déterminée par référence à des écoulements en équilibre dans lesquels  $P = \varepsilon$ . Lorsque ce n'est pas le cas (exemple des écoulements à faibles production d'énergie cinétique turbulente tels que les sillages), cette constante nécessite d'être modifiée pour obtenir un bon accord calcul-expérience. Rodi W., [ROD 72] propose une relation empirique  $c_\mu(P/\varepsilon)$  déduite des données expérimentales, où  $P/\varepsilon$  est la valeur moyenne du rapport production/dissipation dans

une section de l'écoulement. Cette modification permet d'améliorer la prévision des sillages turbulents.

Malgré ses limitations, le modèle  $k-\varepsilon$  reste souvent un bon compromis entre souplesse et simplicité de mise en œuvre d'une part et performances et universalité d'autre part. Le modèle  $k-\varepsilon$  standard, décrit précédemment, même s'il assure la positivité de  $k$ , n'en demeure pas moins non réalisable dans le cas de très forts cisaillements qui peuvent alors entraîner la négativité de certaines composantes normales. Des corrections empiriques peuvent corriger ce défaut, mais une autre solution consiste à utiliser des modèles  $k-\varepsilon$  non-linéaires .

Parmi les techniques empiriques développées afin de vérifier la condition :

$$\frac{R_{12}}{k} = c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \bar{U}_{1,2} < a \quad (a=1),$$

la plus simple consiste à limiter la tension de cisaillement pour les forts gradients de vitesse en introduisant un facteur correctif sur le coefficient  $c_\mu$  :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - c_\mu \frac{a}{a + c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\bar{U}_{l,m} \bar{U}_{l,m}}} \frac{k^2}{\varepsilon} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) \quad [33]$$

C'est dans cet esprit qu'a été développé le modèle de Shih *et al.* [SHI 95] qui introduit une viscosité de turbulence basée sur les contraintes de réalisabilité constituées par la positivité des tensions normales et l'inégalité de Schwarz sur les tensions de cisaillement :

$$\overline{u_\alpha^2} \geq 0 \text{ et } \frac{\overline{u_\alpha u_\beta}}{\sqrt{\overline{u_\alpha^2} \cdot \overline{u_\beta^2}}} \leq 1, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

La loi de comportement obtenue est la suivante :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - c_{\mu}^* \frac{k^2}{\varepsilon} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}), \quad c_{\mu}^* = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{U^* k}{\varepsilon}} \quad [34]$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 4, \quad A_s = \sqrt{6} \cdot \cos \phi, \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} W), \quad W = \frac{S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{\bar{S}}, \\ \bar{S} &= \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \widetilde{\omega}_{ij} \widetilde{\omega}_{ij}}, \quad \widetilde{\omega}_{ij} = \omega_{ij} - 2 \varepsilon_{ijk} \omega'_k, \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{j,i}), \quad S_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}), \quad \omega'_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j}. \end{aligned}$$

Cette formulation inclut aussi l'effet de la rotation d'ensemble.

L'équation du taux de dissipation est alors utilisée sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= C_1 S \varepsilon - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + Diff(\varepsilon), \\ C_1 &= \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = \frac{Sk}{\varepsilon}, \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}, \quad C_2 = 1.9 \end{aligned} \quad [35]$$

Dans cette équation le terme puits a été choisi pour retrouver  $C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$  à fort nombre de Reynolds.

Les méthodes du groupe de renormalisation de Yakhot V. et Orszag S.A., [YAK 86] ont permis de développer des modèles du type  $k-\varepsilon$  qui sous bien des aspects s'apparentent aux modèles  $k-\varepsilon$  classiques, leur apportant ainsi une justification supplémentaire. Mais cette méthode permet aussi de les compléter d'une part en calculant explicitement les constantes numériques et d'autre part en introduisant des termes nouveaux.

Dans la version originale du  $k$ - $\varepsilon$  R.N.G. proposée par Yakhot V. et Orszag S.A., [YAK 86] les coefficients (calculés explicitement par la théorie) sont des constantes. Les valeurs numériques obtenues sont alors :

$$c_\mu = 0.085, \quad \sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0.7179 \quad (\text{nombres de Prandtl-Schmidt turbulents}),$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.063, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.7215 \quad \text{dans l'équation de } \varepsilon.$$

Cette version s'est avérée limitée sur le plan des applications. La nouvelle version proposée par Yakhot V. *et al.*, [YAK 92] basée sur une technique de double développement, a permis d'améliorer la formulation du modèle dans les situations où les taux de déformation sont élevés. La formulation de cette nouvelle version est résumée ci-après :

$$\frac{dk}{dt} = \nu_t S^2 - \varepsilon + \left( \frac{\nu_e}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon \nu_t S^2}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R + \left( \frac{\nu_e}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j}. \quad [36]$$

Le terme  $R$  représente la corrélation  $R = 2\nu \overline{u_{l,i} u_{l,j}} S_{ij}$  approchée par :

$$R = \frac{c_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k},$$

$$\eta = Sk / \varepsilon, \quad S^2 = 2S_{ij} S_{ij}, \quad \nu_e = \nu + \nu_t, \quad \nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon,$$

$$c_\mu = 0.085, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68,$$

$$\sigma_k = 0.72, \quad \sigma_\varepsilon = 0.72, \quad \eta_0 = 4.38, \quad \beta = 0.012.$$

L'équation de  $\varepsilon$  peut être formulée de façon équivalente :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1}^* \frac{\varepsilon \nu_t S^2}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \left( \frac{\nu_e}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} \text{ avec } C_{\varepsilon 1}^* = C_{\varepsilon 1} - \frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3}. \quad [37]$$

La valeur de  $\eta_0$  apparaît comme le point fixe correspondant à l'écoulement turbulent cisailé homogène et la constante  $\beta$  est reliée à la constante de Karman ( $K=0.4$ ). Ce nouveau modèle permet d'obtenir des résultats nettement supérieurs à ceux du modèle original, en particulier dans le cas de l'écoulement en aval d'une marche.

Il convient de signaler à ce propos, l'anomalie du point d'arrêt. Il s'est avéré en effet que la formulation classique du modèle  $k$ - $\varepsilon$  produit un niveau d'énergie beaucoup trop fort à proximité d'un point d'arrêt. Même dans les cas où cette région de l'écoulement n'est pas le but précis de l'étude, les conséquences sur l'ensemble de la prévision numérique peuvent poser problème. C'est le cas d'écoulements autour d'obstacles cylindriques, de l'impact de jets sur une paroi et l'écoulement autour de profils d'ailes d'avion. Pour pallier à cet inconvénient Kato *et al.* [KAT 93] proposent de remplacer le terme de production d'énergie cinétique  $P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} = 2\nu_t S^2$  par  $P = 2\nu_t |\omega| |S|$ . Le terme de production étant strict et non pas le résultat d'une modélisation, on peut interpréter cette modification comme un choix différent de la viscosité de la turbulence :

$$P = 2\nu_t^* S_{ij} S_{ij} \text{ avec } \nu_t^* = c_\mu \left| \frac{\omega}{S} \right| \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{2} \omega_{ij} \omega_{ij}}. \quad [38]$$

D'autres variantes ont été également proposées notamment par Chen *et al.* [CHE 94]. L'application du modèle de Kato et Launder [KAT 93] au cas du sillage derrière un

cylindre de section carrée placé près d'une paroi effectuée par Bosch et Rodi [BOS 96] a permis de générer correctement le lâcher tourbillonnaire obtenu par l'expérience. Ce lâcher n'est pas obtenu, ou bien considérablement amorti, lorsque l'on utilise le modèle  $k-\varepsilon$  standard de Jones et Launder.

Durbin [DUR 96] montre que l'anomalie du point d'arrêt peut être améliorée en imposant la condition de réalisabilité sur les composantes du tenseur de Reynolds obtenues par la loi de comportement usuelle  $R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij}$ . Si l'on écrit la viscosité de la turbulence sous la forme  $\nu_t = c_\mu T.k$  où  $T = k/\varepsilon$  est l'échelle de temps de la turbulence, l'auteur montre que la condition de réalisabilité conduit à une limitation de l'échelle de temps :

$$T \leq \frac{1}{c_\mu \sqrt{6}|S|}.$$

En pratique, partout où intervient l'échelle de temps, on appliquera le

limiteur  $T = \min \left[ \frac{k}{\varepsilon}; \frac{1}{c_\mu \sqrt{6}|S|} \right]$ . La condition peut tout aussi bien s'exprimer sur le

coefficient de viscosité :  $\nu_t = \min \left[ c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}; \frac{k}{\sqrt{6}|S|} \right]$ .

### 3.2. Le modèle de Wilcox

L'utilisation de  $\omega = k/\ell$  pour calculer l'échelle de longueur avait été la première fois proposée par Kolmogoroff en 1942 mais ce modèle, dans sa formulation d'origine, n'a pas conduit à des applications effectives. D'autres auteurs, Saffman P.G., [SAF 70],



Wilcox D.C. et Rubesin W.M., [WIL 80] ont prolongé ce type d'approche en utilisant une formulation  $k - \omega^2$ .

Par la suite, Wilcox D.C., [WIL 88] proposa un modèle  $k - \omega$  qui a été testé de façon assez extensive et dont nous donnons ci-après la formulation :

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dt} &= -R_{ij}\bar{U}_{i,j} - \beta^* k\omega + \left[ \left( \nu + \sigma^* \nu_t \right) k_{,j} \right]_{,j}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\alpha \frac{\omega}{k} R_{ij}\bar{U}_{i,j} - \beta\omega^2 + \left[ \left( \nu + \sigma \nu_t \right) \omega_{,j} \right]_{,j},\end{aligned}\tag{39}$$

$$\nu_t = k / \omega, \quad \alpha = 5/9, \quad \beta = 3/40, \quad \beta^* = 9/100, \quad \sigma = 1/2, \quad \sigma^* = 1/2.$$

Ce modèle correspond donc à l'équation [22] avec  $\alpha = 2$  et  $\beta = -1$ . Les coefficients  $C_3, C_4, C_5, C_6$  pour l'équation de  $\omega$  sont également nuls.

Les conditions aux limites sur une paroi sont spécifiques à ce type de modèle. En supposant qu'à la paroi, le terme de diffusion moléculaire équilibre le terme puits :

$$\beta\omega^2 = \nu\omega_{,jj},$$

on peut trouver une solution en loi puissance :  $\omega \rightarrow \frac{6\nu}{\beta} y^{-2}$  qui sert de condition à la

paroi. L'équation d'énergie  $\beta^* k\omega = \nu k_{,jj}$  conduit à  $k \approx y^m$  avec  $m(m-1) = \frac{6\beta^*}{\beta}$ .

### 3.3. Les modèles de Menter

Ces modèles [MEN 94] ont été construits afin de combiner les avantages des modèles  $k-\varepsilon$  et ceux de Wilcox. Le premier modèle dit *baseline* utilise le modèle  $k-\omega$  de Wilcox dans la région interne de la couche limite et se raccorde au modèle  $k-\varepsilon$  (reformulé en variables  $k-\omega$ ) dans la zone externe de la couche limite et dans les écoulements libres. Les performances sont similaires à celles du modèle  $k-\omega$  retenant sa robustesse tout en évitant la trop grande sensibilité de ce modèle à la turbulence du courant extérieur [MEN 92] par l'emploi d'un modèle  $k-\varepsilon$  qui a l'avantage d'être insensible au courant extérieur. Les modèles  $k-\omega$  et  $k-\varepsilon$  sont pondérés par une fonction de la distance à la paroi :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho k}{dt} &= -R_{ij}\bar{U}_{i,j} - \beta^* \rho k \omega + \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) k_{,j} \right]_{,j} \\ \frac{d\rho \omega}{dt} &= -\frac{\gamma}{\nu_t} R_{ij}\bar{U}_{i,j} - \beta \rho \omega^2 + \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \omega_{,j} \right]_{,j} + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} k_{,j} \omega_{,j}\end{aligned}\quad [40]$$

Les différentes constantes du modèle  $\phi$  sont obtenues à partir des constantes de chacun des modèles initiaux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  par interpolation  $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$ . Les constantes  $\phi_1$  correspondent au modèle de Wilcox :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 3/40, \quad \beta^* = 9/100, \quad \sigma_{k1} = 1/2, \quad \sigma_{\omega 1} = 1/2, \\ \gamma_1 &= \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_{\omega 1} \frac{K^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad K = 0.41,\end{aligned}$$

tandis que les constantes  $\phi_2$  correspondent au modèle  $k$ - $\varepsilon$  standard transformé :

$$\beta_2 = 0.0828, \beta^* = 9/100, \sigma_{k2} = 1., \sigma_{\omega 2} = 0.856, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \sigma_{\omega 2} \frac{K^2}{\sqrt{\beta^*}},$$

avec les définitions :

$$\nu_t = k / \omega, R_{ij} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left( \bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i} - \frac{2}{3} \bar{U}_{m,m} \delta_{ij} \right),$$

$$F_1 = \tanh \left( Arg_1^4 \right), Arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right],$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} k_{,j} \omega_{,j}; 10^{-20} \right),$$

$y$  étant la distance à la paroi la plus proche.

La condition préconisée sur une paroi est  $\omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta y_1)^2}$ .

Le second modèle dit « *SST* » ('Shear Stress Transport Model') introduit une modification de l'expression de la viscosité de la turbulence qui tient compte de l'influence du transport de la tension de cisaillement turbulent. Il permet d'améliorer la prévision de la couche limite avec gradient de pression adverse.

L'hypothèse de Bradshaw (Cf. [SCH 98]) conduirait à  $\tau = -R_{12} = \rho a_1 k$  tandis que les

modèles usuels de viscosité turbulente conduisent à  $\tau = \mu_t \bar{U}_{1,2} = \frac{(\rho a_1 k)^2}{\varepsilon} \bar{U}_{1,2}$  que l'on

peut écrire aussi sous la forme  $\tau = \rho \sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} a_1 k$ . Le rapport  $P/\varepsilon$  peut être nettement

supérieur à l'unité dans une couche limite avec gradient de pression adverse, ce qui conduit à une surestimation de la viscosité, la formule de Bradshaw est alors préférable. Une formulation pondérée est ainsi adoptée dans le modèle *SST*. Sa formulation est identique au précédent sauf que les constantes  $\phi_1$  sont modifiées :

$$\beta_1 = 0.0750, \beta^* = 9/100, \sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega 1} = 1/2, a_1 = 0.31$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_{\omega 1} \frac{K^2}{\sqrt{\beta^*}}, K = 0.41,$$

la viscosité étant définie par :

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)}, \quad \Omega \text{ étant la valeur absolue de la vorticité,}$$

$\Omega = |\bar{U}_{1,2}|$  pour une couche limite. De plus,

$$F_2 = \tanh\left(\text{Arg}_2^2\right), \quad \text{Arg}_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}; \frac{500 \nu}{y^2 \omega}\right).$$

Le terme croisé du type  $k_{,j} \omega_{,j} / \omega$  provenant de la transformation d'une formulation  $k-\varepsilon$  en une formulation  $k-\omega$ , a aussi été introduit par Wilcox [WIL 93] dans une version modifiée du modèle original. Cette variante du modèle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= -R_{ij} \bar{U}_{i,j} - \beta^* k \omega + \left[ \left( \nu + \sigma^* \nu_t \right) k_{,j} \right]_{,j} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\alpha \frac{\omega}{k} R_{ij} \bar{U}_{i,j} - \beta \omega^2 + \left[ \left( \nu + \sigma \nu_t \right) \omega_{,j} \right]_{,j} + \sigma_d \frac{\omega_{,j} k_{,j}}{\omega} \end{aligned} \quad [41]$$

avec :

$$\nu_t = k / \omega, \alpha = 1/2, \beta = 3/40, \beta^* = 9/100, \sigma = 3/5,$$

$$\sigma^* = 1 \text{ et } \sigma_d = \begin{cases} 0.3 & \text{si } \omega_j k_{,j} > 0 \\ 0 & \text{si } \omega_j k_{,j} < 0 \end{cases}$$

En comparaison avec la formulation générique [22], les modèles de Menter font ainsi apparaître un terme de diffusion croisé avec coefficient  $C_6$  non nul.

Une autre variante a été proposée par Kok J. C. [KOK 00] afin de résoudre le problème de dépendance de la formulation  $k-\omega$  vis à vis des valeurs de  $\omega$  à l'extérieur d'une couche limite. La formulation basée sur l'introduction d'un tenseur  $\omega_j k_{,j}$  est analogue à la précédente avec des coefficients numériques différents.

Bredberg J. *et al.* [BRE 02] proposent aussi une forme du modèle  $k-\omega$  qui montre toute l'importance des termes de diffusion croisés pour un bon comportement du modèle aux frontières avec le courant extérieur et pour les écoulements avec recirculation.

### 3.4. Les modèles $k-l$ et $k-l$ de Smith

Les modèles de type  $k-l$  ou  $k-kl$ , après Rotta J.C. [ROT 51A &B], [ROT 72] ont été développés par Spalding D.B., [SPA 69], Rodi W. et Spalding D.B., [ROD 70] puis par Ng K.H. et Spalding D.B., [NG 72] et utilisent une équation pour  $\zeta = k\ell$  du type :

$$\frac{d\zeta}{dt} = B_P \nu_t \frac{\zeta}{k} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) \bar{U}_{i,j} - B_D k^{3/2} + B_Q \left( \nu_t \zeta_{,i} + B_\ell \nu_t \frac{\zeta}{k} k_{,i} \right)_{,i}, \quad [42]$$

L'équation de transport pour  $\zeta = k\ell$  avait été obtenue par Rotta [ROT 51A &B], [ROT 72] par voie analytique sur la base des statistiques en deux points.

La relation avec la formulation générique [22] est obtenue pour  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1$  et les termes de diffusion complémentaires correspondent aux coefficients  $C_4$ ,  $C_5$  et  $C_6$ , si l'on remarque que :

$$\left( \nu_t \frac{\zeta}{k} k_{,i} \right)_{,i} = \frac{\zeta}{k} (\nu_t k_{,i})_{,i} + \nu_t \frac{k_{,i} \zeta_{,i}}{k} - \nu_t \zeta \frac{k_{,i} k_{,i}}{k^2}. \quad [43]$$

On retrouve ce type de formulation dans [MEL 73] ensuite reprise par Smith [SMI 90]. Cependant, les difficultés rencontrées pour adapter le modèle  $k-k\ell$  dans la zone de proche paroi et en particulier la sous-couche visqueuse, ont conduit Smith [SMI 94] à proposer une formulation  $k-\ell$  qui est plus avantageuse du point de vue numérique pour décrire la zone de paroi. En effet  $\ell$  varie en  $y$  près de la paroi alors que  $k\ell$  varie beaucoup plus rapidement (en  $y^3$ ). La formulation est aussi plus simple que celle du modèle utilisant l'équation de  $k\ell$ .

Les équations du modèle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \nu_t (\overline{U}_{i,j})^2 - \frac{(2k)^{3/2}}{B_1 \ell} - 2\nu (\sqrt{k})_{,j}^2 + \left[ (\nu + S_k \nu_t) k_{,j} \right]_{,j}, \\ \frac{d\ell}{dt} &= -\frac{2-E_2}{B_1} \sqrt{2k} \left[ \left( \frac{\ell}{Ky} \right)^2 - 1 \right] + \left[ (\nu + S_k \nu_t) \ell_{,j} \right]_{,j} - S_k \nu_t \left( \frac{\ell}{Ky} \right)^2 \frac{\ell_{,j} \ell_{,j}}{\ell} \\ &\quad + 2S_k \nu_t \frac{\ell_{,j} k_{,j}}{k}, \end{aligned} \quad [44]$$

$$\nu_t = \mu \chi \Phi(\chi, f), \quad \chi = \frac{\rho \ell \sqrt{2k}}{\mu B_1^{1/3}},$$

$$\text{avec } \Phi = \left( \frac{C_1^4 f_1 + C_2^2 \chi^2 + \chi^4}{C_1^4 + C_2^2 \chi^2 + \chi^4} \right)^{1/4}, \quad f_1 = \exp \left[ -50 \left( \frac{\ell}{Ky} \right)^2 \right],$$

$$B_1 = 18.0, \quad E_2 = 1.2, \quad S_k = 0.7, \quad C_1 = 25.5, \quad C_2 = 2.0.$$

La correspondance avec le modèle générique est obtenue cette fois pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ .  
Les termes additionnels sont du type  $C_3$  et  $C_6$ .

### 3.5. Le modèle de Spalart-Allmaras

Il s'agit en réalité d'un modèle une équation pour la viscosité effective [SPA 92&94], encore utilisé pour les applications en aérodynamique. On peut toutefois considérer que l'équation de  $\nu_t$  correspond à une fonction de  $u$  et  $\ell$  avec  $\alpha = \beta = 1$ . L'équation de base du modèle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d\nu_t}{dt} = c_{SA1} \cdot S \cdot \nu_t + c_{SA} (\sigma_t \nu_{(t),j})_{,j} + c'_{SA} \nu_{(t),j} \nu_{(t),j} - c_{SA2} f_w \frac{\nu_t^2}{y^2} + a \cdot \nu \cdot \nu_{(t),jj}$$

[45]

avec  $\sigma_t = \nu_t$ .

Le terme de production peut être rapproché de  $C_{\nu 1t} \cdot S \cdot \nu_t = b \cdot \nu_t \frac{P}{k}$  avec

$P = +\nu_t \cdot U_{i,j} (U_{i,j} + U_{j,i}) = \nu_t S^2$  et  $S = \sqrt{U_{i,j} (U_{i,j} + U_{j,i})}$ . En effet, si l'on peut

toujours écrire  $\nu_t = \ell \sqrt{k}$ , ce qui implique  $k = \frac{\nu_t^2}{\ell^2}$ , on en tire

$$\nu_t \frac{P}{k} = \left( \frac{\nu_t S}{k} \right) \cdot \nu_t S = g \cdot \nu_t S \text{ en remarquant que } g = \frac{\nu_t S}{k} \text{ représente la quantité } -\frac{\overline{u'v'}}{k}$$

dans une couche limite classique  $g \approx 0.3$ .

### 3.6. Les modèles non-linéaires

On peut formellement obtenir des expressions d'ordre supérieur pour le tenseur de Reynolds dont le modèle en gradient constitue le premier terme d'un développement (Lumley J.L., [LUM 70]). De façon plus précise, ce développement s'écrit (Cf. aussi Saffman P.G., [SAF 76]) :

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} + B \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left( S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} II^S \delta_{ij} \right) \\ & + C \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left( \omega_{im} \omega_{mj} - \frac{1}{3} II^\omega \delta_{ij} \right) + D \frac{k^3}{\varepsilon^2} (S_{im} \omega_{mj} + S_{jm} \omega_{mi}) \end{aligned} \quad [45]$$

$$\text{avec } S_{ij} = \frac{1}{2} (\overline{U}_{i,j} + \overline{U}_{j,i}) \text{ et } \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\overline{U}_{i,j} - \overline{U}_{j,i}).$$

Le modèle  $k - \omega^2$  de Wilcox D.C. et Rubesin M.W., [WIL 80] entre dans cette catégorie.

L'expression particulière des tensions de Reynolds de ce modèle,

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \overline{U}_{h,h} \delta_{ij} \right) - \frac{8}{9} \frac{k (S_{im} \omega_{mj} + S_{jm} \omega_{mi})}{\beta^* \omega^2 + 2S_{ml} S_{ml}} \quad [46]$$



peut aussi s'appliquer en écoulement compressible (la divergence de la vitesse n'étant pas considérée nulle). Le taux de dissipation de l'énergie turbulente est donné par  $\varepsilon = \beta^* \omega k$ . Plusieurs auteurs ont contribué plus récemment au développement de ce type de modèles, notamment Yoshizawa A., [YOS 84], Nisizima S. et Yoshizawa A., [NIS 86], Taulbee D.B. *et al.*, [TAU 93], Craft T.J., Launder B.E. et Suga K., [CRA 93]. Cette dernière référence représente la synthèse de travaux réalisés à l'UMIST (Manchester) qui ont montré qu'un développement contenant des termes cubiques était nécessaire pour atteindre un niveau de généralité suffisant pour pallier aux principales insuffisances des modèles classiques. Ces modèles utilisent une équation pour le taux de dissipation  $\varepsilon$ . Le modèle de Craft T.J., Launder B.E. et Suga K., [CRA 93] a été appliqué notamment aux cas complexes du canal courbe et du jet pariétal axisymétrique et il a permis une amélioration décisive par rapport aux modèles classiques. Une version révisée améliorée de ce modèle a été proposée dans [CRA 96] toujours orientée vers une plus grande généralité incluant en particulier les effets de courbure des lignes de courant. La formulation pour  $a_{ij} = (R_{ij} - 2/3 k \delta_{ij}) / k$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & -\frac{\nu_t}{k} S_{ij} + c_1 \frac{\nu_t}{\varepsilon} \left( S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} II^S \delta_{ij} \right) + c_2 \frac{\nu_t}{\varepsilon} (S_{im} \omega_{mj} + S_{jm} \omega_{mi}) \\
& + c_3 \frac{\nu_t}{\varepsilon} \left( \omega_{im} \omega_{mj} - \frac{1}{3} II^\omega \delta_{ij} \right) + c_4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon^2} (S_{im} \omega_{lj} + S_{jm} \omega_{li}) S_{ml} \\
& + c_5 \nu_t \frac{k}{\varepsilon^2} \left( \omega_{il} \omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \omega_{lm} \omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{ml} \omega_{mn} \omega_{nl} \delta_{ij} \right) \\
& + c_6 \nu_t \frac{k}{\varepsilon^2} II^S S_{ij} + c_7 \nu_t \frac{k}{\varepsilon^2} II^\omega S_{ij},
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -0.1, \quad c_2 = 0.1, \quad c_3 = 0.26, \quad c_4 = -10c_\mu^2, \\
c_5 &= 0, \quad c_6 = -5c_\mu^2, \quad c_7 = 5c_\mu^2, \\
c_\mu &= \frac{0.3}{1 + 0.35[\max(S, \omega)]^{3/2}} \left[ 1 - \exp\left\{-0.36 / \exp(-0.75 \max(S, \omega))\right\} \right], \\
f_\mu &= 1 - \exp\left[ -\left(\frac{\text{Re}_t}{90}\right)^{1/2} - \left(\frac{\text{Re}_t}{400}\right)^2 \right], \\
\nu_t &= c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad f_\mu = \min\left[1, 0.2 + \frac{0.8 \text{Re}_t}{50}\right], \\
S &= \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \omega_{ij} \omega_{ij}}, \quad S_{ij} = \bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}, \quad \omega_{ij} = \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{j,i}, \\
\text{Re}_t &= \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (\text{Cf. § 3.1. pour la définition de } \widetilde{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Les modèles algébriques explicites (E.A.S.M. , ‘explicit algebraic stress models’), tel le modèle de Gatski et Speziale [GAT 93] obtenus par résolution formelle du système linéarisé des équations aux tensions de Reynolds à l’équilibre peuvent aussi se rattacher à cette catégorie. Les modèles de viscosité effective de la turbulence ainsi obtenus généralisent l’hypothèse de Boussinesq.

Gatski et Speziale [GAT 93], sur la base d’un modèle au second ordre linéaire et de la

relation d’équilibre  $\frac{dR_{ij}}{dt} = (P - \varepsilon) \frac{R_{ij}}{k}$ , obtiennent, après un peu d’algèbre :

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \frac{6\alpha_1}{3 - 2\eta^2 + 6\xi^2} \left[ \frac{k^2}{\varepsilon} S_{ij} + \alpha_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (S_{im} \omega_{mj} + S_{jm} \omega_{mi}) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left( S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} \Pi^S \delta_{ij} \right) \right] \quad [48]
\end{aligned}$$

Les coefficients  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  dépendent des valeurs des constantes du modèle de turbulence au second ordre initial :

La singularité apparaissant au dénominateur peut être régularisée par l'approximation :

$$\frac{1}{3-2\eta^2+6\xi^2} \approx \frac{1+\eta^2}{3+\eta^2+6\xi^2\eta^2+6\xi^2}. \quad [49]$$

Cette régularisation permet d'utiliser le modèle dans des conditions loin de l'équilibre ([SPE 96]).

#### 4. Modèles obtenus par changement de fonction

Une autre méthode pour construire des modèles à deux équations est d'effectuer sur le modèle classique  $k-\varepsilon$ , un changement de fonction inconnue du type  $Z = k^\alpha \varepsilon^\beta$ . On obtient ainsi un modèle  $k-Z$ .

Le point de départ est donc le modèle  $k-\varepsilon$  de base (dans une formulation à faible nombre de Reynolds) rappelé ci-après :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= P + C_s(\sigma_t k_{,j})_{,j} - \varepsilon + \nu k_{,jj} \quad , \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} \quad , \\ \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} &= C_{\varepsilon 1} \frac{P\tilde{\varepsilon}}{k} + C_\varepsilon (\sigma_t \tilde{\varepsilon}_{,j})_{,j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \Sigma + \nu \tilde{\varepsilon}_{,jj} \quad , \end{aligned} \quad [50]$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= 2\nu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \underbrace{U_{i,pl} U_{i,pl}}_{(\partial^2 U / \partial n^2)^2}, \quad R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t (U_{i,j} + U_{j,i}), \\ \nu_t &= C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \sigma_t = f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad f_\mu = \exp\left[-3.4 / (1. + \frac{\text{Re}_T}{50.})^2\right].\end{aligned}$$

On introduit alors la nouvelle fonction inconnue  $Z = k^\alpha \varepsilon^\beta$ , ou plus précisément

$Z = k^\alpha \tilde{\varepsilon}^\beta$  et on déduit aisément de  $\frac{dZ}{Z} = \alpha \frac{dk}{k} + \beta \frac{d\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}}$  les équations :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{Z^{\frac{1}{\beta}}}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}}, \quad dZ = \alpha \frac{Z}{k} dk + \beta Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} d\tilde{\varepsilon}, \quad [51]$$

$$\frac{dk}{dt} = P + C_s (\sigma_t k_{,j})_{,j} - \frac{Z^{1/\beta}}{k^{\alpha/\beta}} - \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} + \nu k_{,jj},$$

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha + \beta C_{\varepsilon 1}) \frac{ZP}{k} - (\alpha + \beta C_{\varepsilon 2} f_2) \frac{Z^{1+\frac{1}{\beta}}}{k^{1+\frac{\alpha}{\beta}}} + \alpha C_s \frac{Z}{k} (\sigma_t k_{,j})_{,j} + \alpha \nu \frac{Z}{k} k_{,jj}$$

$$- \alpha \frac{Z}{k} \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} + \beta C_\varepsilon Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} \left[ \sigma_t \left( \frac{Z^{\frac{1}{\beta}}}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)_{,j} \right]_{,j}$$

$$+ \beta Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} \boldsymbol{\Sigma} + \beta \nu Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} \left( \frac{Z^{\frac{1}{\beta}}}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)_{,jj}. \quad [52]$$

Les termes de diffusion s'écrivent:

$$\begin{aligned} \beta C_\varepsilon Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} \left[ \sigma_t \left( \frac{Z^{\frac{1}{\beta}}}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)_{,j} \right]_{,j} &= C_\varepsilon (\sigma_t Z_{,j})_{,j} + C_\varepsilon \sigma_t \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{Z_{,j} Z_{,j}}{Z} \\ -\alpha C_\varepsilon \frac{Z}{k} (\sigma_t k_{,j})_{,j} + \alpha C_\varepsilon \sigma_t \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{Z}{k^2} k_{,j} k_{,j} - 2 C_\varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \sigma_t \frac{Z_{,j} k_{,j}}{k}, \end{aligned} \quad [53]$$

$$\begin{aligned} \beta \nu Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} \left( \frac{Z^{\frac{1}{\beta}}}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)_{,jj} &= \nu Z_{,jj} + \nu \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{Z_{,j} Z_{,j}}{Z} \\ -\alpha \nu \frac{Z}{k} k_{,jj} + \alpha \nu \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{Z}{k^2} k_{,j} k_{,j} - 2 \nu \frac{\alpha}{\beta} \frac{Z_{,j} k_{,j}}{k} \end{aligned} \quad [54]$$

et on aboutit à l'équation pour  $Z$  :

$$\frac{dZ}{dt} = S^+ - S^- + S_C + D_t + D_\nu + D_{tc} + D_{vc}, \quad [55]$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \underbrace{C_{Z1} \frac{ZP}{k}}_{S^+:source} - \underbrace{C_{Z2} \frac{Z^{1+\frac{1}{\beta}}}{k^{1+\frac{\alpha}{\beta}}}}_{S^-:puits} - \underbrace{C_{Z4} \frac{Z}{k} \left\{ \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} \right\}}_{S_c:sources complémentaires} + C_{Z5} Z^{1-\frac{1}{\beta}} k^{\frac{\alpha}{\beta}} \Sigma \\ &+ \underbrace{\chi_{Z1} (\sigma_t Z_{,j})_{,j}}_{D_t:diffusion turbulente} + \underbrace{\chi_{Z2} \sigma_t \frac{Z_{,j} Z_{,j}}{Z} + C_{Z3} \frac{Z}{k} (\sigma_t k_{,j})_{,j} + \chi_{Z3} \sigma_t \frac{Z}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \chi_{Z4} \sigma_t \frac{Z_{,j} k_{,j}}{k}}_{D_{tc}:diffusion turbulente complémentaire} \end{aligned}$$

$$\underbrace{+\eta_{Z1}\nu Z_{,jj}}_{D_\nu: \text{diffusion moléculaire}} \underbrace{-\eta_{Z0}\nu \frac{Z}{k} k_{,jj} + \eta_{Z2}\nu \frac{Z_j Z_{,j}}{Z} + \eta_{Z3}\nu \frac{Z}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \eta_{Z4}\nu \frac{Z_j k_{,j}}{k}}_{D_{\nu c}: \text{diffusion moléculaire complémentaire}}, \quad [56]$$

avec ( $\alpha$  et  $\beta$  n'ont pas la même signification que dans le paragraphe 2):

$$\begin{aligned}
 C_{Z1} &= \alpha + \beta C_{\varepsilon 1} & C_{Z2} &= \alpha + \beta C_{\varepsilon 2} f_2 & C_{Z3} &= \alpha(C_s - C_\varepsilon) \\
 C_{Z4} &= \alpha & C_{Z5} &= \beta & \chi_{Z1} &= C_\varepsilon \\
 \chi_{Z2} &= C_\varepsilon \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) & \chi_{Z3} &= \alpha C_\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) & \chi_{Z4} &= -2 \frac{\alpha}{\beta} C_\varepsilon \\
 \eta_{Z0} &= 0. & \eta_{Z1} &= 1. & \eta_{Z2} &= \frac{1-\beta}{\beta} \\
 \eta_{Z3} &= \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) & \eta_{Z4} &= -2 \frac{\alpha}{\beta} \\
 \text{et } \sigma_t &= f_\mu \frac{k^{\frac{2+\alpha}{\beta}}}{Z^{\frac{1}{\beta}}}, & v_t &= C_\mu \cdot \sigma_t. & & [57]
 \end{aligned}$$

Cette équation est totalement analogue à l'équation générique [22] obtenue précédemment par une approche différente. La genericité de l'équation précédente est donc ainsi établie, c'est à dire qu'un nouveau changement de fonction n'introduira pas de termes nouveaux. L'équation [56] comprend déjà tous les termes complémentaires présent dans [22].

Considérons les cas spécifiques usuels :

$$\begin{aligned}
 \alpha=-1, \beta=1 &\Rightarrow (k-\omega) \\
 \alpha=3/2, \beta=-1 &\Rightarrow (k-\ell) \\
 \alpha=2, \beta=-1 &\Rightarrow (k-\nu_t) \Rightarrow (y-\nu_t)
 \end{aligned}$$

1°/ Modèle  $(k - \omega)$ -----

$$\begin{aligned}
 \frac{dk}{dt} &= P + C_s (\sigma_t k_{,j})_{,j} - \omega \cdot k - \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} + \nu k_{,jj}, \\
 \frac{dZ}{dt} &= C_{\omega 1} \frac{\omega P}{k} - C_{\omega 2} \omega^2 + C_{\omega 5} \frac{\Sigma}{k} \\
 &\quad - C_{\omega 4} \frac{\omega}{k} \left\{ \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} \right\} + \chi_{\omega 1} (\sigma_t \omega_{,j})_{,j} + \chi_{\omega 2} \sigma_t \frac{\omega_{,j} \omega_{,j}}{\omega} \\
 &\quad + C_{\omega 3} \frac{\omega}{k} (\sigma_t k_{,j})_{,j} + \chi_{\omega 3} \sigma_t \frac{\omega}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \chi_{\omega 4} \sigma_t \frac{\omega_{,j} k_{,j}}{k} \\
 &\quad + \eta_{\omega 1} \nu \omega_{,jj} + \eta_{\omega 2} \nu \frac{\omega_{,j} \omega_{,j}}{\omega} - \eta_{\omega 0} \nu \frac{\omega}{k} k_{,jj} + \eta_{\omega 3} \nu \frac{\omega}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \eta_{\omega 4} \nu \frac{\omega_{,j} k_{,j}}{k},
 \end{aligned}$$

et  $\sigma_t = f_\mu \frac{k}{\omega}$ ,

avec:

$C_{\omega 1} = C_{\varepsilon 1} - 1$	$C_{\omega 2} = C_{\varepsilon 2} f_2 - 1$	$C_{\omega 3} = C_{\varepsilon} - C_s$
$C_{\omega 4} = -1$	$C_{\omega 5} = 1$	$\chi_{\omega 1} = C_{\varepsilon}$
$\chi_{\omega 2} = 0$	$\chi_{\omega 3} = 0$	$\chi_{\omega 4} = 2C_{\varepsilon}$
$\eta_{\omega 0} = 0.$	$\eta_{\omega 1} = 1.$	$\eta_{\omega 2} = 0$
$\eta_{\omega 3} = 0$	$\eta_{\omega 4} = 2$	[58]

2°/ Modèle  $(k - \ell)$  -----

$$\begin{aligned}
 \frac{dk}{dt} &= P + C_s (\sigma_t k_{,j})_{,j} - \frac{k^{3/2}}{\ell} - \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} + \nu k_{,jj}, \\
 \frac{d\ell}{dt} &= C_{\ell 1} \frac{\ell P}{k} - C_{\ell 2} \sqrt{k} + C_{\ell 5} \ell^2 k^{-3/2} \Sigma \\
 &\quad - C_{\ell 4} \frac{\ell}{k} \left\{ \nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} \right\} + \chi_{\ell 1} (\sigma_t \ell_{,j})_{,j} + \chi_{\ell 2} \sigma_t \frac{\ell_{,j} \ell_{,j}}{\ell} \\
 &\quad + C_{\ell 3} \frac{\ell}{k} (\sigma_t k_{,j})_{,j} + \chi_{\ell 3} \sigma_t \frac{\ell}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \chi_{\ell 4} \sigma_t \frac{\ell_{,j} k_{,j}}{k} \\
 &\quad + \eta_{\ell 1} \nu \ell_{,jj} + \eta_{\ell 2} \nu \frac{\ell_{,j} \ell_{,j}}{\ell} - \eta_{\ell 0} \nu \frac{\ell}{k} k_{,jj} + \eta_{\ell 3} \nu \frac{\ell}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \eta_{\ell 4} \nu \frac{\ell_{,j} k_{,j}}{k}
 \end{aligned}$$

et  $\sigma_t = f_\mu \ell \sqrt{k}$ ,

avec:

$$\begin{array}{lll}
 C_{\ell 1} = 1.5 - C_{\varepsilon 1} & C_{\ell 2} = 1.5 - C_{\varepsilon 2} f_2 & C_{\ell 3} = 1.5(C_s - C_\varepsilon) \\
 C_{\ell 4} = 1.5 & C_{\ell 5} = -1 & \chi_{\ell 1} = C_\varepsilon \\
 \chi_{\ell 2} = -2C_\varepsilon & \chi_{\ell 3} = -0.75C_\varepsilon & \chi_{\ell 4} = 3C_\varepsilon \\
 \eta_{\ell 0} = 0. & \eta_{\ell 1} = 1. & \eta_{\ell 2} = -2 \\
 \eta_{\ell 3} = -0.75 & \eta_{\ell 4} = 3 & 
 \end{array} \quad [59]$$

Remarque :  $C_{\ell 1} \approx 0$  tandis que  $C_{\ell 2} < 0$  correspond à une source(+) dans l'équation de  $\ell$ .



3°/ Modèle ( $v_t$ ) -----

$$\frac{dk}{dt} = P + C_s(\sigma_t k_{,j})_{,j} - \frac{k^2}{v_t} - v \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} + v k_{,jj}$$

(cette équation ne sera toutefois pas utilisée)

$$\begin{aligned} \frac{dv_t}{dt} = & C_{v1} \frac{v_t P}{k} - C_{v2} k + C_{v5} v_t^2 k^{-2} \Sigma \\ & - C_{v4} \frac{v_t}{k} \left\{ v \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k} \right\} + \chi_{v1} (\sigma_t v_{t,j})_{,j} + \chi_{v2} \sigma_t \frac{v_{t,j} v_{t,j}}{v_t} \\ & + C_{v3} \frac{v_t}{k} (\sigma_t k_{,j})_{,j} + \chi_{v3} \sigma_t \frac{v_t}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \chi_{v4} \sigma_t \frac{v_{t,j} k_{,j}}{k} \\ & + \eta_{v1} v v_{t,jj} + \eta_{v2} v \frac{v_{t,j} v_{t,j}}{v_t} - \eta_{v0} v \frac{v_t}{k} k_{,jj} + \eta_{v3} v \frac{v_t}{k^2} k_{,j} k_{,j} + \eta_{v4} v \frac{v_{t,j} k_{,j}}{k}, \end{aligned}$$

avec  $v_t = \sigma_t$  et :

$$\begin{array}{lll} C_{v1} = 2 - C_{\varepsilon 1} & C_{v2} = 2 - C_{\varepsilon 2} f_2 & C_{v3} = 2(C_s - C_{\varepsilon}) \\ C_{v4} = 2 & C_{v5} = -1 & \chi_{v1} = C_{\varepsilon} \\ \chi_{v2} = -2C_{\varepsilon} & \chi_{v3} = -2C_{\varepsilon} & \chi_{v4} = 4C_{\varepsilon} \\ \eta_{v0} = 0. & \eta_{v1} = 1. & \eta_{v2} = -2 \\ \eta_{v3} = -2 & \eta_{v4} = 4 & \end{array} \quad [60]$$

On a vu précédemment que  $v_t \frac{P}{k}$  pouvait être rapproché de  $v_t . S$  et par ailleurs, de

l'écriture  $v_t = \ell \sqrt{k}$  on déduit  $k \approx \frac{v_t^2}{\ell^2}$  pour le terme puits, ce qui permet de faire le lien

avec le modèle original. L'équation de  $k$  peut être écartée si on conserve  $\ell$  comme deuxième paramètre.

Si on accepte  $\nu_t \frac{P}{k} = 0.3 \nu_t S$  (voir précédemment) alors  $k \approx \frac{\nu_t^2}{\ell^2} \approx \frac{\nu_t^2}{\kappa^2 y^2}$  en supposant

que l'échelle de longueur est donnée par la longueur de mélange (application restreinte aux couches limites). Cette remarque permet (moyennant ces approximations supplémentaires) de régresser vers un modèle à une équation.

On remarquera que le simple changement de fonction inconnue fournit un modèle  $k$ - $Z$  qui bien sûr reste en principe mathématiquement équivalent au modèle  $k$ - $\varepsilon$  de départ. Mais l'utilisation de coefficients différents permettra, outre les commodités pratiques de mise en œuvre avec une formulation plus stable des conditions aux limites, d'avoir des modèles différents dans leur formulation.

*Autre approche* : Si on choisit  $Z = k^\alpha \varepsilon^\beta$  en prenant  $\varepsilon$  au lieu de  $\tilde{\varepsilon}$ , alors on aurait :

$$\frac{dk}{dt} = P + C_s (\sigma_t k_{,j})_{,j} - \frac{Z^{1/\beta}}{k^{\alpha/\beta}} + \nu k_{,jj},$$

et il conviendrait dans ce cas de se référer à une équation de transport de  $\varepsilon$  qui n'est plus celle du modèle de Jones et Launder mais qui est utilisée dans certains modèles :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{P\varepsilon}{k} + C_{\varepsilon} (\sigma_t \varepsilon_{,j})_{,j} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}\varepsilon}{k} + \Sigma + \nu \varepsilon_{,jj},$$

$$\text{avec } C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon} \mathcal{E}}{k} = C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon^2}{k} - \underbrace{\nu \frac{k_{,j} k_{,j}}{2k^2}}_{\substack{\text{terme qui} \\ \text{s'ajoute à } \Sigma}} \varepsilon \right),$$

il convient, bien sûr, d'adapter les conditions aux limites sur  $Z$  selon que l'on utilise  $\varepsilon$  ou  $\tilde{\varepsilon}$  comme fonction de départ, en particulier sur une paroi.

Dans tous les cas, le modèle transformé présente comme le modèle initial un terme source et un terme puits qui sont les seuls agissants en turbulence homogène. Par contre les termes de diffusion turbulente et moléculaire, sont plus complexes et amènent de nombreux termes complémentaires. Ce sont ces termes complémentaires de diffusion qui distinguent en fait les différents modèles à deux équations. On peut donc dans la pratique, distinguer deux catégories de coefficients :

les coefficients :  $C_{Z1}, C_{Z2}, C_{Z4}, C_{Z5}$  d'une part et

les coefficients :  $\chi_{Z1}, \chi_{Z2}, \chi_{Z3}, C_{Z3}, \chi_{Z4}$  et  $\eta_{Z0}, \eta_{Z1}, \eta_{Z2}, \eta_{Z3}, \eta_{Z4}$  d'autre part.

La première série, si elle est calculée à l'aide des formules de transformation conduit à des modèles entièrement équivalents en turbulence homogène. Pour la deuxième série, les termes à retenir ne sont pas les mêmes selon les modèles, ils sont spécifiques à chaque modèle. L'écriture générique est utile pour mettre en évidence tous les termes « candidats » possibles.

## 5. Remarques finales

Une méthode originale pour la formulation d'un modèle générique de turbulence à deux équations a été présenté. La méthode qui s'appuie sur le modelage invariant de J.L. Lumley garantit la genericité du système d'équations obtenu. Les modèles à deux

équations usuels apparaissent ainsi sous la forme de cas particuliers de la formulation générique. Une autre méthode consiste à effectuer un changement de fonction inconnue à partir du modèle classique  $k-\varepsilon$ . Cette méthode conduit à une formulation tout à fait analogue, un nouveau changement de fonction inconnue n'introduit aucun terme nouveau, ce qui montre encore son caractère générique par une voir différente.

En turbulence homogène, tous les modèles à deux équations sont exactement équivalents. En effet, un changement de fonction inconnue n'introduit pas de termes supplémentaires. Le second membre de l'équation de  $Z$  est toujours constitué d'un terme source et d'un terme puits, quelque soit le choix de  $Z$ . Dans le cas inhomogène, ce sont les termes de diffusion qui peuvent différer d'un modèle à un autre. En effet, le modèle générique établi montre que des termes de diffusion à gradients multiples et des termes croisés s'introduisent. D'un point de vue pratique, les différences entre divers modèles portent sur ces termes de diffusion et l'utilisation de termes complémentaires, notamment le terme de diffusion croisé. Une autre différence peut provenir de la formulation des conditions aux limites qui peut différer selon le choix de  $Z$ . Le modèle classique  $k-\varepsilon$ , présente de nombreuses insuffisances et les équations sont souvent raides du point de vue mathématique lorsque l'on traite des écoulements de paroi à fort nombre de Reynolds. Ainsi, dans les applications spécifiques de l'aérodynamique, les modèles alternatifs  $k-\omega$  ou  $k-kl$  sont souvent utilisés, avec des termes de diffusion complémentaires. Le modèle générique présenté permet une formulation synthétique de ces diverses approches et permet aussi de suggérer des termes nouveaux qui pourraient servir au développement de nouvelles formulations, qui bien sûr devraient être évaluées sur des écoulements tests avant de considérer leur application à des situations pratiques.

## 6. Références

- [BOS 96] BOSCH G. et RODI W., « Simulation of vortex shedding past a square cylinder near a wall », *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(3), 1996, p. 267-275.
- [BRE 02] BREDBERG J., PENG S-H., DAVIDSON L. « An improved  $k-\omega$  turbulence model applied to recirculating flows », *Int. J. Heat Fluid Flow*, 23, 2002, p. 731-743.
- [CAT 99] CATRIS S., « Étude des contraintes et qualification de modèles à viscosité turbulente », *Thèse de Doctorat*, École Nat. Sup. de l'Aéronaut. et de l'Espace, 1999.
- [CHE 94] CHEN W., LIEN F. S. et LESCHZINER M.A., « Computational modelling of turbulent flow in turbomachine passage with low Re two-equation models », In *Comput. Fluid Dynamics 94*, S. Wagner, E.H. Hirschel, J. Périaux, and R. Piva, editors, John Wiley and Sons, Chicester, 1994, p. 517-524.
- [CRA 91] CRAFT T.J., « Second moment modelling of turbulent scalar transport », *Ph. D. Thesis*, Univ. of Manchester, UK, 1991. (Paru aussi sous le titre suivant : UMIST Internal Report, Mechanical Engineering Department, TFD/91/3).
- [CRA 93] CRAFT T.J., LAUNDER B.E. ET SUGA K., « Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements », *5th IAHR Conference on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Presse Ponts et Chaussées, Paris, 1993, p. 125-132.
- [CRA 96] CRAFT T.J., LAUNDER B.E. et SUGA K., « Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence », *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(2), 1996, p. 108-115.
- [DUR 96] DURBIN P.A., « On the  $k-\varepsilon$  stagnation point anomaly », *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(1), Tech. Note, 1996, p. 89-90.
- [GAT 93] GATSKI T.B. et SPEZIALE C.G., « On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows », *J. Fluid Mech.*, 254, 1993, p. 59-78.

- [HAN 80] HANJALIC K. et LAUNDER B.E. , « Sensitizing the dissipation equation to irrotational strain », *J. of Fluid Engng.*, Trans.ASME , 102, 1980, p. 34–40.
- [JON 72] JONES W.P. et LAUNDER B.E., « The prediction of laminarisation with a two-equations model of turbulence », *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, 1972, p. 301.
- [JON 73] JONES W.P. et LAUNDER B.E., « The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two-equations model of turbulence », *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16, 1973, p. 1119.
- [KAT 93] KATO M. et LAUNDER B.E., « The modelling of turbulent flow around a stationary and vibrating square cylinder », *Proc. 9th Symp. on Turbulent Shear Flows*, Kyoto, Japon, vol. 9, 1993, p. 10.4/1-10.4/6.
- [KOK 00] KOK J.C., « Resolving the dependence on freestream values for the  $k-\omega$  turbulence model », *A.I.A.A. J.*, 38(7), 2000, p. 1292-1295.
- [LAU 75] LAUNDER B.E., « Prediction methods for turbulent flows », *IVK Lectures Serie 76*, March 3–7–1975, "Progress in the modelling of turbulent transport", 1975.
- [LUM 70] LUMLEY J.L., « Toward a turbulent constitutive relation », *J. Fluid Mech.*, 41(2), 1970, p. 413.
- [LUM 70B] LUMLEY J.L., *Stochastic tools in turbulence*, Academic Press, 1970
- [MEL 73] MELLOR G.L. et HERRING H.J., « A survey of the mean turbulent field closure models », *A.I.A.A. J.*, 11, n° 5, 1973, p. 590–595.
- [MEN 92] MENTER F.R., « Influence of freestream values on  $k-\omega$  turbulence model predictions », *A.I.A.A. J.*, 30(6), 1992, p. 1657-1659.
- [MEN 94] MENTER F.R., « Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications », *A.I.A.A. J.*, 32(8), 1994, p. 1598-1605.
- [NG 72] NG K.H. et SPALDING D.B., « Turbulence model for boundary Layers near walls », *Phys. of Fluids*, 15, 1972, p. 20.
- [NIS 86] NISIZIMA S. ET YOSHIKAWA A., « Turbulent channel and Couette flow using an anisotropic  $k-\varepsilon$  model », *A.I.A.A. J.*, 25(3), 1986, p. 414-420.

- [POP 78] POPE S.B., « An explanation of the turbulent round jet/plane jet anomaly », *A.I.A.A. J.*, 16(3), 1978, p. 279–281.
- [ROD 70] RODI W. et SPALDING D.B., « A two parameter model of turbulence and its application to free jets », *Wärme und Stoffübertragung*, 3, 1970, p. 85.
- [ROD 72] RODI W., « The prediction of free turbulent boundary layer by use of a two equation model of turbulence », *Ph. D. Thesis*, Imp. Coll. London. 1972.
- [ROT 51A] ROTTA J.C., « Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz I », *Zeitschrift für Physik*, 129, 1951, p. 547.
- [ROT 51B] ROTTA J.C., « Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz II », *Zeitschrift für Physik* 131, 1951, p. 51.
- [ROT 72] ROTTA J.C., « Turbulent shear layer prediction on the basis of the transport equations for the Reynolds stresses », *Appl. Mechanics. Proc. Thirteenth Int. Congress of Theor. and Appl. Mech. Moscow, August 1972*.
- [SAF 70] SAFFMAN P.G., « A model for inhomogeneous turbulent flow », *Proc. Roy. Soc. London A* 317, 1970, p. 417.
- [SAF 76] SAFFMAN P.G., « Development of a complete model for the calculation of turbulent shear flows », *Proc. Symp. on Turbulence and Dynamical Systems*, Duke Univ., Durham, USA, 1976.
- [SCH 98] SCHIESTEL R., « Les écoulements turbulents, modélisation et simulation », Ed. Hermès, Paris 2<sup>ème</sup> édition, 1998.
- [SHI 95] SHIH T.H. , LIOU W. W., SHABBIR A., YANG Z. et ZHU J., « A new  $k-\varepsilon$  eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows », *Computers Fluids*, 24(3), 1995, p. 227-238.
- [SIE 75] SIESS J., « Etude d'après la méthode de J.L. Lumley de la pénétration de la turbulence dans un milieu stratifié », *Thèse Doct. Ing.*, Univ. Aix-Marseille II, 1975.

- [SMI 90] SMITH B.R., « The  $k-k\ell$  turbulence and wall layer model for compressible flows », *AIAA paper*, 90-1483, , 21<sup>st</sup> *Fluid Dynamics, plasma dynamics and lasers Conf.*, Seattle, WA, 1990.
- [SMI 94] SMITH B.R., « A near wall model for the  $k-\ell$  two-equation turbulence model », *AIAA paper*, 94-2386, 25<sup>th</sup> *Fluid Dynamics Conf.*, Colorado, CO, 1994.
- [SPA 69] SPALDING D.B., « The calculation of the length scale of turbulence in some shear flows remote from walls », *Progress in Heat an Mass Transfer*, Vol. 2, Pergamon Press, London, 1969.
- [SPA 92] SPALART P.R. et ALLMARAS S.R., « A one equation turbulence model for aerodynamic flows », *A.I.A.A. Paper* 92-0439, 30<sup>th</sup> *Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, 1992.
- [SPA 94] SPALART P. R. et ALLMARAS S. R., « A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows », *La Recherche Aerospatiale*, n° 1, 1994, p. 5-21.
- [SPE 96] SPEZIALE C. G., XU X. H., « Towards the development of second order closure models for non-equilibrium turbulent flows », », *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17, 1996, p. 238-244.
- [TAU 93] TAULBEE D.B., SONNENMEIER J.R. et WALL K.M., « Application of a new non-linear stress-strain model to axisymmetric swirling flows », *Proc. 2nd. Int. Symp. on Engng Turbulence Modelling and Measurement*, ed. by Rodi W. and Martelli F., 1993, Elsevier.
- [WIL 80] WILCOX D.C. et RUBESIN W.M., « Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility », *NASA Tech. Paper* n° 1517, 1980.
- [WIL 88] WILCOX D.C., « Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models », *A.I.A.A. J.*, 26 (11), 1988, p. 1299-1310.
- [WIL 93] WILCOX D. C., « A two-equation turbulence model for wall-bounded and free shear flows », 24<sup>th</sup> *AIAA Fluids Dynamics Conference*, Orlando FL, USA, 1993.



- [YAK 86] YAKHOT V. et ORSZAG S.A., « Renormalization group analysis of turbulence - 1- Basic theory », *J. of Scientific Computing*, 1(1), 1986, p. 3-51.
- [YAK 92] YAKHOT V., ORSZAG S.A., THANGAM S., GATSKI T.B. et SPEZIALE C.G., « Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique », *Phys. of Fluids A*, 4(7), 1992, p. 1510-1520.
- [YOS 84] YOSHIKAWA, A., « Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation », *Phys. of Fluids*, 27(6), 1984, p. 1377-1387.